

von Hinten: Investitionsplanung und -rechnung, #03

05.12.2005

Alle Foliennummern beziehen sich auf die Ursprungs-PDF' ohne Lösungen
 (vgl. „investition_script_1x4_ol_051111.pdf“, „investition_script_2x4_ol_051111.pdf“).

[112](#)

- Die **Nutzungsdauer** ist auch ein **Entscheidungsproblem**, da mit der Nutzungsdauer der **Restwert-Erlös sinkt** und sich damit die Produkt-Rendite ändert (die auf der Produktions-Anlage erwirkt wird, deren Wert mit der Zeit sinkt).

1. Einmalinvestition

- Für diese Berechnungen sei der **Restwerterlös nicht** wie bisher im Kapitalwert **enthalten** sondern werde explizit als Nettoerlös addiert: $V_0(T) = \sum_{t=1}^T a_t \cdot q^{-t} - A_0 + L_T \cdot q^{-T}$
 Gesucht ist dann der maximale Kapitalwert in Abhängigkeit von der Nutzungsdauer. Dabei sei T_{\max} die **technisch maximal mögliche** Nutzungsdauer; die wirtschaftlich sinnvolle ist meist deutlich geringer.

[117](#)

- Das Beispiel geht von einer **linearen AfA** aus; in Abhängigkeit von den Handlungsalternativen ergeben sich unterschiedliche Zahlungsreihen, deren Kapitalwerte zu untersuchen sind; der größte V_0 zeigt dann die **optimale Nutzungsdauer**. Wenn L_t der Netto-Restwerterlös in Abhängigkeit von der Projektlaufzeit (Nutzungsdauer) ist, ergibt sich im Beispiel bei einem Kalkulationszinsfuß von 10%:

$$a_t = \{-150, 40, 70, 40, 30, 40, 20\}$$

$$L_t = \{150, 125, 100, 75, 50, 25, 0\}$$

T	t →	0	1	2	3	4	5	6	V_0
1		-150	165						0
2		-150	40	170					26,86
3		-150	40	70	115				30,62
4		-150	40	70	40	80			28,91
5		-150	40	70	40	30	65		35,12
6		-150	40	70	40	30	40	20	30,88

Der maximale Kapitalwert ergibt sich, wenn man die Nutzungsdauer auf **5 Perioden** festlegt.

• Alternative Berechnungsmethode: **Grenzwertkalkül**

Geht man von einer gewissen Nutzungsdauer aus (z.B. T-1), so ist eine **weitere Nutzung** (bis z.B. T) nur **sinnvoll**, wenn der **Kapitalwert steigt**, also $V_0(T) > V_0(T-1)$ gilt. Es ergibt sich:

in Langform:
$$\sum_{t=1}^T a_t \cdot q^{-t} - A_0 + L_T \cdot q^{-T} > \sum_{t=1}^{T-1} a_t \cdot q^{-t} - A_0 + L_{T-1} \cdot q^{-(T-1)}$$

links Ausgliedern letzten Summandens:
$$\sum_{t=1}^{T-1} a_t \cdot q^{-t} + a_T \cdot q^{-T} - A_0 + L_T \cdot q^{-T} > \sum_{t=1}^{T-1} a_t \cdot q^{-t} - A_0 + L_{T-1} \cdot q^{-(T-1)}$$

ermöglicht Subtr. auf beiden Seiten von $\sum_{t=1}^{T-1} a_t \cdot q^{-t}$ und $-A_0$ zu:
$$a_T \cdot q^{-T} + L_T \cdot q^{-T} > L_{T-1} \cdot q^{-(T-1)}$$

oder:
$$a_T \cdot q^{-T} + L_T \cdot q^{-T} - L_{T-1} \cdot q^{-(T-1)} > 0$$

$$a_T \cdot q^{-T} + L_T \cdot q^{-T} - L_{T-1} \cdot q^{-T+1} > 0$$

$$a_T \cdot q^{-T} + L_T \cdot q^{-T} - L_{T-1} \cdot q^{-T} \cdot q > 0$$

$$(a_T + L_T - L_{T-1} \cdot q) \cdot q^{-T} > 0$$

da $q > 0$ und $q^{-T} > 0$ ist durch q^{-T} teilbar:

$$a_T + L_T - L_{T-1} \cdot q > 0$$

$$a_T + L_T - L_{T-1} \cdot (1+i) > 0$$

$$a_T + L_T - L_{T-1} - L_{T-1} \cdot i > 0$$

Dieser Term $a_T + L_T - L_{T-1} - L_{T-1} \cdot i$ aus der **zusätzlich notwendigen Einzahlung** für die weitere Nutzung a_T , der **Restwertreduktion** $L_T - L_{T-1}$ und der **entgangenen Verzinsung des Restwerterlöses** durch den späteren Verkauf $-L_{T-1} \cdot i$ heißt **Grenzeinzahlungsüberschuß GEZÜ**.

Folgen in einem Projekt ab einem bestimmten Zeitpunkt nur noch **negative GEZÜ**, so ist eine Verlängerung des Projekts solange sinnvoll, als der GEZÜ positiv bleibt. Wird die Voraussetzung außer acht gelassen, können sich Fehlentscheidungen wie in nebenstehendem Beispiel ergeben.

Zahlenbeispiel:

t	1	2	3	4	5	6
a_t	40,00	70,00	40,00	30,00	40,00	20,00
$L_T - L_{T-1}$	- 25,00	- 25,00	- 25,00	- 25,00	- 25,00	- 25,00
$- L_{T-1} \cdot i$	- 15,00	- 12,50	- 10,00	- 7,50	- 5,00	- 2,50
GEZÜ	0,00	32,50	5,00	- 2,50	10,00	- 7,50
V_0	0,00	26,86	30,62	28,91	35,12	30,88

Entsprechend dem Entscheidungskriterium des Grenzwertkalküls würde man die Nutzung am Ende der 3. Periode beenden und damit das Kapitalwertmaximum verfehlen, das erst nach 5 Perioden erreicht wird.

© Dr. Peter von Hinten

2. Zweigliedrige Investitionskette

- Gesucht ist die **optimale Nutzungsdauer** einer **Anlage** und deren **Ersatzanlage**. Dabei gilt es zwischen einer **Entnahmemaximierung** und **Endwertmaximierung** (=Vermögensmaximierung) zu unterscheiden.
 - ⇒ erhebliche **Prognoseleistung** notwendig

Zur Vereinfachung handele es sich **beide Male** um **identische Investitionen** (gleiche Zahlungsreihen, gleiche Liquidationserlöse)

- ⇒ Nutzung des **Rollback-Verfahrens** durch
 - Bestimmung der **optimalen Nutzungsdauer** T_B für **Anlage B** suchen und damit dann
 - die **optimale Nutzungsdauer** T_A für **Anlage A** suchen.

Die **Zahlungsreihe** für **A** und **B** sei $\{-100, 70, 85, 50, 30, 15\}$, der mögliche **Liquidationserlös** in den Zeitpunkten $t = 0 \dots 5$ sei $\{100, 80, 60, 40, 20, 0\}$, der **Kalkulationszinsfuß** betrage 10%.

Die **optimale Nutzungsdauer** für **Projekt B** (beim Kapitalwertmaximum) ergibt sich offenbar bei der **4. Periode** mit dem Kapitalwert von 105,60.

T_B	$t \rightarrow$	T_A	T_{A+1}	T_{A+2}	T_{A+3}	T_{A+4}	T_{A+5}	V_0
1		-100	150					36,36
2		-100	70	145				83,47
3		-100	70	85	90			101,50
4		-100	70	85	50	50		105,60
5		-100	70	85	50	30	15	101,25

Nun ist im zweiten Schritt der **optimale Ersatzzeitpunkt** zu finden. Diese

Entscheidung falle **am Anfang** bei $t = 0$ (Berücksichtigung wichtig). Die mögliche Projektdauer ist dabei gleich der möglichen **Projektdauer** von **B**.

Bei kombinierten Projekten wird nun für die Nutzungsdauer der jeweiligen Einzelprojekte die Abkürzung τ benutzt (Achtung: in den Folien uneinheitlich verwendet). Der **optimale Kapitalwert** ergibt sich für **Projekt A** (wg. der gleichen Zahlungsreihe) wieder bei $\tau_A = 4$. **Entscheidend** ist aber der **optimale Kapitalwert** für die **gesamte Investitionskette**. Der optimale Kapitalwert V_B muß um die Nutzungsdauer τ_A abgezinst werden, da wir in $t = 0$ entscheiden: $V_B(\tau_A, t=0) = V_B(\tau_A) \cdot q^{-\tau_A}$

V_0 der gesamten Kette ist dann die **Summe** aus dem **Kapitalwert** von **A** und dem **abgezinsten Kapitalwert** von **B**. So betrachtet ist das **Maximum** dann für die **3. Periode** erreicht.

τ_A	$V_A(t=0)$	$V_B(\tau_A)$	$V_B(\tau_A, t=0)$	$V_0(\text{Kette})$
1	36,36	105,60	96,00	132,36
2	83,47	105,60	87,27	170,74
3	101,50	105,60	79,34	180,84
4	105,60	105,60	72,13	177,73
5	101,25	105,60	65,57	166,82

134

- **Errechnung des optimalen Ersatzzeitpunkts** einer zweigliedrigen Investitionskette mittels **Grenzwertkalkül**. Da die Entscheidung am Anfang der Investitionskette bei $t=0$ fällt, ist sie **prospektiv**.

Zu untersuchen ist, **wann der Zinsverlust** durch späteres Auflegen des **Projekts B** den **Grenzeinzahlungsüberschuß** aus **Projekt A** auffrisst. Es ergibt sich das **Entscheidungskriterium**:

Projekt A	Projekt B
$a_{\tau_A} + (L_{\tau_A} - L_{\tau_A-1}) - (L_{\tau_A-1} \cdot i)$	$V_0 \cdot i$

$$a_{A, \tau_A} + (L_{A, \tau_A} - L_{A, \tau_A-1}) - (L_{A, \tau_A-1} \cdot i) \geq V_{0B, \tau_A}(\tau_B) \cdot i$$

Am Beispiel unserer Zahlungsreihe von $a_t = \{-100, 70, 85, 50, 30, 15\}$ ergäbe sich: die **Schmälerung** des **Erlöses** durch den **Restwert** aus **Projekt A** ist wegen **linearer AfA konstant**. Der eine Periode lang **abgezinste Restwerterlös** des Projekts A sinkt gleichmäßig.

τ_A	a_t	$L_T - L_{T-1}$	$L_{T-1} \cdot i$	GEZÜ
1	70	-20	-10	40
2	85	-20	-8	57
3	50	-20	-6	24
4	30	-20	-4	6
5	15	-20	-2	-7

Der **Kapitalwert** des **Projekts B** beträgt (vgl. oben) 105,60 – man **verliert** also in **einer Periode**, die das Projekt später aufgelegt wird, $V_0 \cdot i = 105,60 \cdot 10\% = 10,56$. Dieser Verlust wird nur bis zur Periode 3 durch den GEZÜ mehr als ausgeglichen, eine **Laufzeit** des **Projekts A** von **4 Perioden** oder länger ist also **nicht sinnvoll**.

- Anstelle der bisherigen Betrachtung einer identischen (Ersatz-)Investition soll sich für unsere Betrachtungen nun nach der **1. Periode** eine zusätzliche Möglichkeit für ein **Projekt N** mit der Zahlungsreihe

$$a_i = \{-150, 100, 90, 90, 40, 20, 10\}$$

und den Restwert-Erlösmöglichkeiten

$$L_i = \{150, 120, 90, 60, 40, 20, 0\}$$

ergeben. Die **Entscheidung**, ob und wann das neue Projekt anstelle des geplanten Projekts B aufgelegt wird, ist also nicht zu Beginn der Investitionskette ($t = 0$) zu treffen, sondern **bei $t = 2$** .

Für diese Entscheidung ist

- die **optimale Nutzungsdauer** T_N für das Projekt I_N **N festzustellen** und
- die **Vorteilhaftigkeit** des Projekts N ggü. dem Projekt B zu **prüfen** sowie
- falls **Projekt B vorteilhafter** ist: wie geplant (s.o.) zu verfahren oder falls **Projekt N vorteilhafter** ist: der **optimale Ersatzzeitpunkt** für die Investition I_A zu **ermitteln**.

Das Alternativprojekt N hat keine lineare, sondern **degressive AfA**: anfänglich 30, dann 20 pro Periode. Damit ergeben sich als Möglichkeiten für die Investition I_N die nebenstehenden **Handlungsalternativen**. Der **maximale Kapitalwert** wird bei einer Laufzeit von $T_N = 4$ mit $V_{0N} = 137,50$ erreicht.

T_N	$t \rightarrow$	T_A	T_{A+1}	T_{A+2}	T_{A+3}	T_{A+4}	T_{A+5}	T_{A+6}	V_{0N}
1		-150	220						50,0
2		-150	100	180					89,7
3		-150	100	90	150				127,9
4		-150	100	90	90	80			137,5
5		-150	100	90	90	40	40		135,1
6		-150	100	90	90	40	20	10	128,3

Das ist **mehr, als beim Projekt B** erreicht würde ($V_{0B} = 105,60$ bei $T_B = 4$, vgl. oben). Es ist also das **Projekt N durchzuführen**, und zwar mit einer **Laufzeit von 4 Perioden**.

Für die nun folgende Suche nach dem **günstigsten Ersatzzeitpunkt** ist von der **2. Periode** des Projekts A **auszugehen** (Entscheidungszeitpunkt!). **Zurückliegende EZÜ's** sind durch diese Entscheidung in $t = 2$ nicht mehr zu beeinflussen und daher dafür **irrelevant**. Eine **Projektlaufzeit** für **Projekt A** von $T_A = 0$ endete also zum ursprünglichen Zeitpunkt $t_A = 2$, $T_A = 1$ endete bei $t_A = 3$ usw.

Handlungsalternativen ergeben sich für die **Wahl** des **Ersatzzeitpunkts** nach nebenstehendem Schema. Die Zahlen ergeben sich wieder aus der **Summe** der **EZÜ** der jeweiligen Periode sowie dem zu diesem Zeitpunkt zu erzielenden **Restwerterlös**.

T_A	$t \rightarrow$	2	3	4	5	V_{0A}
0		60				60,0
1		0	90			81,8
2		0	50	50		86,8
3		0	50	30	15	81,5

Für die Betrachtung der **gesamten Investitionskette** ist die Summe aus dem Kapitalwert des Projekts A $V_{0A}(t = 2)$ und dem **auf den Entscheidungszeitpunkt abgezinsten Kapitalwert** des Projekts N $V_{0N}(t = 2) = V_{0N} \cdot q^{-T_A}$ zu bilden.

τ_A	$V_{0A}(t=2)$	V_{0N}	$V_{0N} \cdot q^{-T_A}$	$V_0(\text{Kette})$
0	60,0	137,5	137,5	197,5
1	81,8	137,5	125,0	206,8
2	86,8	137,5	113,6	200,4
3	81,5	137,5	103,3	184,8