von Hinten: Investitionsplanung und -rechnung, #03

21.11.2005

Alle Foliennummern beziehen sich auf die Ursprungs-PDF' ohne Lösungen (vgl. „investition_script_1x4_ol_051111.pdf", „investition_script_2x4_ol_051111.pdf").

63

- Der **interne Zinsfuß i^*** eines Projekts ist der Zinssatz, bei dem der **Kapitalwert** des Projekts **Null** ist.
  Zwar kann man durch Nullsetzung

  $$V_0 = \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot q^{-t} - A_0 = \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot (1+i^*)^{-t} - A_0 = 0$$

  einen **mathematischen Ansatz** für die Lösung finden, allerdings handelt es sich schon bei fünf betrachteten Perioden um einen **Polynom vierten Grades**, sodaß man **nicht** ohne weiteres nach dem gesuchten **Zinssatz i^* auflösen** kann.

  Der **interne Zinsfuß** wird manchmal auch als die „**mögliche Verzinsung des Anfangskapitals**" bezeichnet; diese Interpretation ist wg. der **Wiederanlageprämisse** realitätsfremd.
  In den meisten Fällen ist die Aussage

  „**Der interne Zinsfuß gibt die Verzinsung des im Projekt gebundenen Kapitals an**"

  besser – diese Definition ist allerdings nicht mehr tauglich, sobald im Projekt **negative Zahlungsüberschüsse** vorkommen (die man mit Krediten ausgleichen müßte).

  Üblich ist auch eine Bewertung nach der **Baldwin**[1]-Methode („Baldwin-Verzinsung").

  Der interne Zinsfuß ist in jedem Falle eine **Renditeziffer**, die eine **Beurteilung** der **Vorteilhaftigkeit** eines **Projekts** erlaubt.

---

[1] Der **Baldwin-Zinssatz** ist eine „theoretisch saubere" Fortentwicklung des Internen Zinsfußes. Das Modell ist praktisch nachvollziehbar: Ein am Anfang bereitgestellter und verzinslich angelegter Betrag dient der Deckung aller Auszahlungsüberschüsse, auf einem zweiten Konto werden die Einzahlungen einschließlich des Verkaufserlöses gesammelt und am Ende bewertet.
Somit werden sowohl Input- als auch Outputfaktoren entsprechend ihres zeitlichen Interesses ausgewiesen. Es wird immer genau eine Lösung gefunden, Mehrdeutigkeiten oder unsinnige Lösungen sind ausgeschlossen.

Baldwin-Zinssatz berechnet sich zu: $i_B = \sqrt[N]{\frac{EW_N}{KW_0}} - 1$, wobei

$N =$	Nutzungsdauer
$KW_0 =$	Kapitalwert der Auszahlungsüberschüsse in 0
$EW_N =$	Endwert der Einzahlungsüberschüsse in N

[Dr. Steffen Metzner]

64

- Beim **Projekt A** ergäbe sich (wenn man vorher per Taschenrechner oder Excel's „XINTZINSFUSS" den internen Zinsfuß zu 14% bestimmt hätte...):

-1.200,00	01.01.2005
368,00	01.01.2006
440,00	01.01.2007
398,00	01.01.2008
456,00	01.01.2009
	0,1400

$$V_0 = \frac{368}{1{,}14^1} + \frac{440}{1{,}14^2} + \frac{398}{1{,}14^3} + \frac{456}{1{,}14^4} - \left|-1.200\right|$$

$$= 322{,}81 + 338{,}56 + 268{,}64 + 269{,}99 - 1.200$$

$$= 0$$

65

- Nutzt man die **EZÜ** der Zahlungsreihe bei Inanspruchnahme eines Kredits (zum internen Zinsfuß) konsequent für **Zinsen** und **Tilgung**, so ergibt sich in jedem **Zeitpunkt t**:

  $KB_t = KB_{t-1} - S_{t-1}$ für die Kapitalbindung

  $Z_t = KB_t \cdot i^*$ für die Zinsen

  $S_t = a_t - Z_t$ für die Tilgung (settlement)

  Diese **Annahmen** stellen also **Verwendungsregeln** dar, wie das **Kapital** einzusetzen ist. So ist auch die **Definition** von **Wiederanlageprämissen überflüssig**.
  Nachteil: bei **negativen ZÜ** ist das **Verfahren nicht** mehr **tauglich**.

- Zur **Sensitivitätsanalyse**[2] kann der **interne Zinsfuß** genutzt werden:

  - Der iZF ist der **Maximalzinssatz** eines **Kredits**, mit dem ein **Projekt finanziert** wird – bei **höheren Finanzierungskosten** würde das **Projekt unvorteilhaft**

  - Der iZF ist der **Maximalzinssatz** einer **Alternativanlage** eines **selbstfinanzierten Projekts**, **oberhalb** dessen das **Projekt** besser **nicht realisiert**, sondern das **eigene** für das Projekt vorgesehene **Kapital** in die **Alternativanlage gesteckt** wird.

68

- Zur Definition einer **Kapitalwertfunktion**[3] geht man von einer „**Normalinvestition**" aus, die wie folgt definiert ist:

  a) Im Projekt gibt es **eine** oder mehrere (negative) **Anfangsauszahlung**(en), **alle anderen** Auszahlungen sind **positiv**.

  $a_0 < 0$

  $a_t > 0 \quad$ wobei: $1 \le t \le T$

  b) Die **Summe** der **Zahlungsreihe** ist **positiv**: $\sum_{t=0}^{T} a_t > 0$

[2] Eine **Sensitivitätsanalyse** erlaubt die Sensibilität eines Entscheidungsmodells im Bezug auf unterschiedliche Parameter festzustellen. So können z.B. im Falle einer **Investitionsrechnung** die Reaktionen auf Veränderungen von Basisgrößen wie Investitionssumme oder Nutzenhöhe untersucht werden. Eine umfassende Beurteilung eines Projekts wird insbesondere durch Erstellung eines Risikoprofils möglich. Zur spartenunabhängigen Sensitivitätsanalyse vgl. insb. das Sensitivitätsmodell nach Prof. Dr. Vester (http://www.frederic-vester.de/).

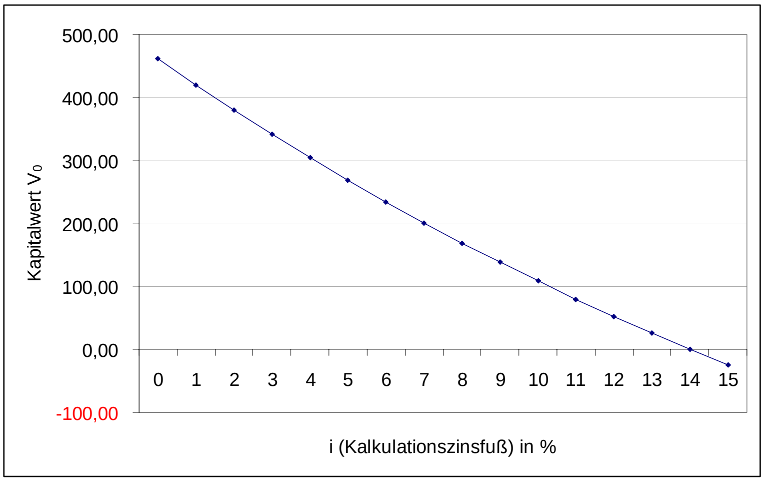
[3] Die **Kapitalwertfunktion** ordnet jedem Kalkulationszinsfuß i bei gegebenem Zahlungsstrom den zugehörigen Kapitalwert zu.

Die **Kapitalwertfunktion** des **Projekts A** ergibt sich (unter Anwendung der Excel-Funktion „XKAPITALWERT“…) als $V_0 = f(i)$ nach

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot q^{-t} - A_0$$

zu nebenstehendem Grafen; dabei ist bereits der **Nulldurchgang** der

- **Abszisse** als **internem Zinsfuß** $\mathbf{i^* = 14\%}$



und

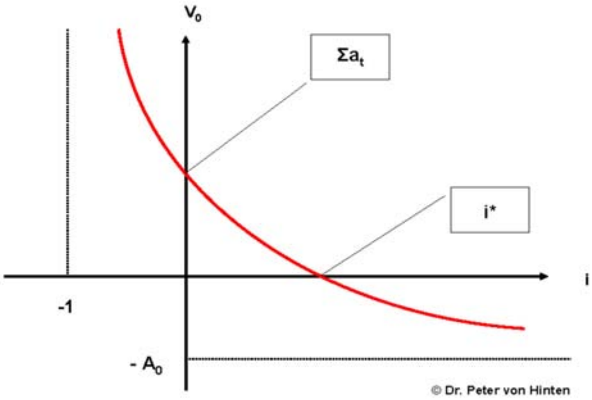
- **Ordinate** = **462** als **Kapitalwert** bei i = 0

erkennbar. Da t und a_t (bei $t \geq 1$) immer **positiv** sind, ist die **Steigung** der **Kapitalwertfunktion** im Bereich $-1 > i > \infty$ **negativ**, die **Kapitalwertfunktion fällt monoton** (d.h., sie hat keine „Sprünge“).

Um die Kapitalwertfunktion rein qualitativ zu beurteilen wird sie zu

$$\frac{\partial V_0}{\partial i} = -\sum_{t=1}^{T} t \cdot a_t \cdot q^{-(t+1)} = -\sum_{t=1}^{T} \frac{t \cdot a_t}{(1+i)^{t+1}}$$

abgeleitet. Mit der Ableitung lassen sich die Fälle



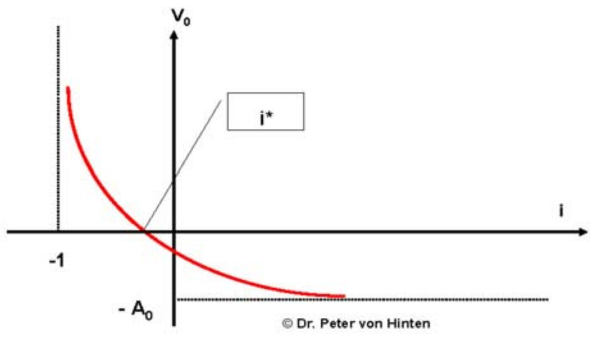
- $i \longrightarrow -1$
  Wenn **i** gg. **-1** geht, geht **q** gg. **Null** und damit der **Kapitalwert** gg. **unendlich**. Der Graf geht asymptotisch gegen **-1**.

- $i = 0$ (Nulldurchgang der Ordinate)
  Wenn **i Null** ist, ist **q** gerade **1**.
  Damit wird
  der **Kapitalwert** nun $\sum_{t=1}^{T} a_t - A_0$ oder $\sum_{t=0}^{T} a_t$.

- $i \longrightarrow \infty$
  Wenn **i** gg. **unendlich** wächst, geht auch **q** gg. **unendlich**.
  Damit sinkt der **Kapitalwert** stetig gg. **-A_0** – der Graf nähert sich asymtotisch **-A_0** an.

analysieren. Der zweite Nulldurchgang erfolgt beim **Kapitalwert Null** genau dann, wenn der Zins **i** dem **internen Zinsfuß** $\mathbf{i^*}$ entspricht.

Es **lohnt** sich also immer dann, in ein Projekt zu **investieren**, wenn der **interne Zinsfuß größer** ist als der **Kalkulationszinsfuß**[4]: $i^* > i > 0$. Das gilt für alle **Zahlungsreihen** mit **einem Vorzeichenwechsel** und **negativen Auszahlungen** am **Anfang** („$--++++$“). Dem **Grafen** folgend scheint auch ein **lohnendes Projekt** denkbar, bei dem der **interne Zinsfuß** im **Negativen**, aber immer noch **größer** als der **Kalkulationszinsfuß** existiert. Ein **negativer Kalkulationszinsfuß** ist aber **unsinnig** und dieser **Bereich** ist daher von vorneherein **auszuschließen**.



In **Formeln** läßt sich dieser Zusammenhang darstellen:

Gilt für eine Zahlungsreihe $a_t < 0$ in $t = 0 \ldots \bar{t}$ (nur Auszahlungsüberschüsse)

und $a_t > 0$ in $t = \bar{t}+1 \ldots T$ (nur Einzahlungsüberschüsse)

daß $\sum a_t > 0$ (Erfüllung des „Deckungskriteriums“)

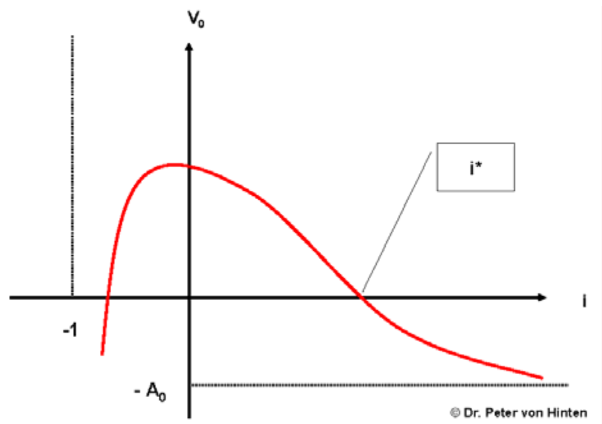
so folgt $i^* > 0$.

Gilt darüber hinaus $i^* > i$

so folgt $V_0 > 0$

und das Projekt ist wg. des positiven Kapitalwerts vorteilhaft. $\sum a_t < 0$ kann nicht vorteilhaft sein (vgl. Grafik) und eine Untersuchung ist obsolet.

- In der Praxis kommt auch der Fall vor, daß AZÜ’s von EZÜ’s gefolgt werden und das Projekt danach mit AZÜ abschließt („$---++++---$“). Das ist z.B. für **Bergbau typisch**, bei dem zunächst Kosten durch das Freilegen entstehen und man danach eine Zeit lang Gewinne durch das Ernten hat. Danach entstehen durch das Rekultivieren der Grube zum Projektende wieder Kosten. In einem solchen Fall nimmt die **Kapitalwertfunktion** nebenstehende Gestalt an. Das **Maximum** muß dabei nicht auf der Ordinate, sondern kann im ersten oder zweiten Quadranten liegen.



Zerlegt man die Formel für die Kapitalwertberechnung

$$V_0 = \sum_{t=1}^{T} a_t \cdot q^{-t} - A_0 \quad \text{bzw.} \quad V_0 = \sum_{t=0}^{T} a_t \cdot q^{-t}$$

in ihre Einzelsummanden und betrachtet den Fall, daß **q gegen Null** geht (sprich: **i** geht **gegen -1**), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{q \to 0} V_0 &= \lim_{q \to 0} (a_0 + a_1 \cdot q^{-1} + \ldots + a_{T-1} \cdot q^{-(T-1)} + a_T \cdot q^{-T}) \\ &= \lim_{q \to 0} (a_0 + a_1 \cdot q^{-1} + \ldots + a_{T-1} \cdot q^{1-T} + a_T \cdot q^{-T}) \\ &= \lim_{q \to 0} \left[q^{-T} (a_0 \cdot q^T + a_1 \cdot q^{T-1} + \ldots + a_{T-1} \cdot q^1 + a_T) \right]\end{aligned}$$

---

[4] Marktzins

Für den Fall, daß **q gegen Null** geht, werden **alle Summanden** in der Klammer außer dem letzten zu Null. Es ergibt sich:

$\lim\limits_{q \to 0} V_0 = \lim\limits_{q \to 0} \frac{a_T}{q^T}$ und da a_T (wg. „$---++++---$") immer negativ ist: $\lim\limits_{q \to 0} V_0 = -\infty$

Zudem ergibt sich aus dem Grafen: für den Fall $0 < i^* < i$ gilt $V_0 < 0$

für den Fall $0 < i < i^*$ gilt $V_0 > 0$

Auch im Falle eines Investitionsprojekts nach dem Muster „$---++++---$" führt es also zu einem **positiven Kapitalwert** und der Vorteilhaftigkeit des Projekts, **wenn** der **interne Zinsfuß** den **Kalkulationszinssatz übersteigt** und zu einem **negativen Kapitalwert**, **wenn** der **Kalkulationszinssatz größer** als der **interne Zinsfuß** ist.

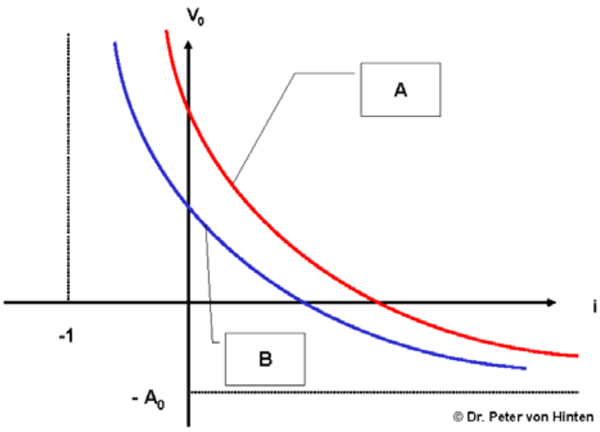
80

- **Entscheidungen** zwischen **einander ausschließenden Projekten**

Beispielauswahl von Projekten:

Projekt A:	a_t = {-1.200, 368, 440, 398, 456}	i^* = 0,14
Projekt B:	a_t = {-1.000, 330, 304, 278, 452}	i^* = 0,13
Projekt C:	a_t = {-1.400, 268, 356, 432, 896}	i^* = 0,12
Projekt D:	a_t = {-800, 220, 205, 390, 345}	i^* = 0,15

→ **Vergleich** zwischen **A** und **B**:
Erstellt man die Kapitalwertfunktion, so zeigt sich, daß **A** für **jeden Kalkulationszinssatz** einen **höheren Kapitalwert** als **B** hat: **A** dominiert **B** und deshalb kann für die weiteren Überlegungen **B ausgeschlossen** werden.



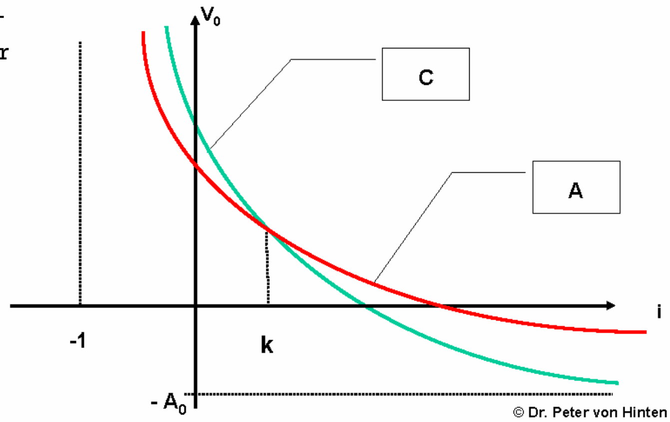
Da es aufwändig ist, für eine solche Überlegung die Kapitalwertfunktion zu erstellen, kann man sich für eine Betrachtung **auf** die beiden **Schnittpunkte** der Achsen **beschränken**: der Abszissenschnittpunkt wird durch den internen Zinsfuß und der Ordinatenschnittpunkt durch die Summe der Zahlungen festgelegt. In diesem Falle also wie in nebenstehender Tabelle dargestellt.

	$\sum a_t$	i*
Projekt A	462	0,14
Projekt B	364	0,13

→ **Vergleich** zwischen **A** und **C**:
Betrachtet man bei diesem Vergleich die beiden Schnittpunkte, zeigt sich **keine Dominanz**. Stattdessen gibt es einen **Schnittpunkt** bei **k** der beiden Kapitalwert-funktionen; **steigt** der **Kalkulationszins-satz** darüber, ist **A vorteilhafter**, **sinkt** er darunter, ist **C vorteilhafter**. Wie findet man diesen **kritischen Zinssatz k**?

	$\sum a_t$	i*
Projekt A	462	0,14
Projekt C	552	0,12

Man könnte die beiden **Kapitalwert-funktionen gleichsetzen**, was aber **aufwändige Rechnereien** zur Folge hätte. Stattdessen bestimmt man besser den **internen Zinsfuß** des (virtuellen) **Differenzprojekts**, der genau diesen Punkt darstellt.



Man stellt sich also im Grunde die Frage, ob sich neben dem Projekt **A** (das die **kleinere Anfangsauszahlung** und den **höheren internen Zinsfuß** hat) eine **Mehrinvestition** zur **Finanzierung** von **C lohnt**: sie lohnt sich **dann**, wenn der **interne Zinsfuß** i^* der Differenzinvestition **größer** ist als der **Kalkulationszinssatz i**.

Bestimmt man die **Differenzinvestition C-A**, so ergibt sich ein **interner Zinsfuß** dafür von $i_{C-A}^* = 6{,}7\%$. Der Zinssatz am Markt sei 6%. Es lohnt sich, das **Projekt C durchzuführen**.

t	0	1	2	3	4
C	- 1400	268	356	432	896
A	- 1200	368	440	398	456
C - A	- 200	- 100	- 84	34	440

Regel: $i^*_{C-A} > i \rightarrow C \succ A$

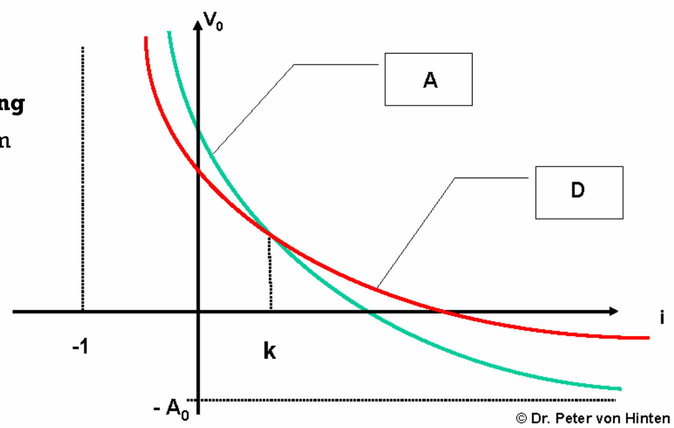
$i^*_{C-A} = i \rightarrow C \approx A$

$i^*_{C-A} < i \rightarrow C \prec A$

Für die weiteren Überlegungen betrage der **Kalkulationszinssatz 9%**. Dann macht es keinen Sinn, **C** zu realisieren. Es bleibt also nurmehr **A** gegen **D** zu vergleichen.

→ **Vergleich** zwischen **A** und **D**:
Anhand der beiden Achsenschnittpunkte erkennt man wieder, daß sich die beiden **Kapitalwertkurven schneiden** müssen.

	$\sum a_t$	i*
Projekt A	462	0,14
Projekt D	360	0,15



Bei diesem Vergleich hat nun das **Projekt D** die **kleinere Anfangsauszahlung** und den **höheren internen Zinsfuß**. Darum ist hier die Frage zu stellen, ob eine **Mehrinvestition von D auf A lohnt**, also die **Differenzinvestition A-D** zu bilden.

Es ergibt sich ein **interner Zinsfuß** der **Differenzinvestition** von $i_{A-D}^* = 11{,}4\%$. Bei einem Marktzins von 6% ist also die zusätzliche Investition ebenso sinnvoll wie bei einem Zinssatz von 9%. Aus $i_{A-D}^* > i$ folgt, daß **Projekt A** dem **Projekt D vorzuziehen** ist. Dieses Ergebnis gilt, **obwohl** der **interne Zinsfuß** von **D größer als** derjenige von **A** ist(!!). Dies erklärt sich damit, daß die Investionssumme geringer ist und deshalb die Verzinsung weniger erträgt.

Diese Ergebnisse lassen sich nur erzielen, wenn auch die **Differenzinvestition** wieder eine **Normalinvestition**[5] ist. **Sonst gelten diese Regeln nicht.**

[5] **Normalinvestition** ist eine Investition, die
- genau **einen** Vorzeichenwechsel hat,
- mit **Auszahlung**(en) **beginnt** und deren
- **Summe** der **Zahlungen größer Null** ist.