

## von Hinten: Investitionsplanung und -rechnung, #03

14.11.2005

Alle Foliennummern beziehen sich auf die Ursprungs-PDF' ohne Lösungen  
(vgl. „investition\_script\_1x4\_ol\_051111.pdf“, „investition\_script\_2x4\_ol\_051111.pdf“).

### Teil B

[37](#)

- „**Zinssatz und Zinsfuß sind synonym**“<sup>1</sup>
- Man unterscheidet zwischen der **Mehrung** des **Gegenwartswerts**  $V_0$  und der Mehrung des **Endvermögens**  $V_T$  einer **Zahlungsreihe** ggü. einer Vergleichsgeldanlage am Kapitalmarkt zum normalen Zinssatz. Der **Kapitalwert** (Mehrwert des Gegenwartswerts) wird errechnet, indem man nach

$$V_0 = \sum_{t=1}^T a_t \cdot q^{-t} - A_0 \quad \text{wobei: } q = 1 + i$$

**alle Zahlungen** der Zahlungsreihe auf  $t_0$  **abzinst**, der **Endwert** (Mehrung des Endvermögens) nach

$$V_T = \sum_{t=1}^T a_t \cdot q^{T-t} - A_0 \cdot q^T \quad \text{wobei: } A_0 = |a_0|$$

durch **Addition** aller **Zinsen** und **Tilgungszahlungen**.

Beispiele: betrachte die **Zahlungsreihe** **{-1200, 368, 440, 398, 456}** bei einem Zinssatz von **10%** am **vollkommenen Kapitalmarkt**, bei dem also gilt:

- Sollzinssatz = Habenzinssatz
- Risiko- und Zeitpräferenzen sind irrelevant
- Geldanlagen und Kredite sind in beliebiger Höhe am Markt platzierbar, sodaß Investitions- und Finanzierungsentscheidungen getrennt werden können

#### Kapitalwert

$$\begin{aligned} V_0 &= \sum_{t=1}^T a_t \cdot q^{-t} - A_0 &&= 368 \cdot q^{-1} + 440 \cdot q^{-2} + 398 \cdot q^{-3} + 456 \cdot q^{-4} - |-1.200| \\ &&&= 334,55 + 363,64 + 299,02 + 311,45 - 1.200 \\ &&&= 108,66 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Manchmal wird präzise Zinsfuß und Zinssatz wie folgt unterschieden:  
Zinsfuß  $p = \text{Wert (z.B. 10)}$   
Zinssatz  $i = p/100$  (z.B.  $0,1 = 10\%$ )

### Endwert

$$V_T = \sum_{t=1}^T a_t \cdot q^{T-t} - A_0 \cdot q^T = 368 \cdot 1,1^3 + 440 \cdot 1,1^2 + 398 \cdot 1,1^1 + 456 \cdot 1,1^0 - | -1.200 | \cdot 1,1^4$$

$$= 489,81 + 532,40 + 437,80 + 456 - 1.756,92$$

$$= 159,09$$

Logische Folge: da Kapital-/ Endwert als Differenz eines Projekts zur Standardanlage definiert sind, sind der **Kapital-/ Endwert** einer **Geldanlage** zum **Standardzinssatz Null**.

Ein **Investitionsprojekt** ist immer **vorteilhaft**, wenn es einen **Kapitalwert größer Null** ( $V_0 > 0$ ) hat. Allerdings ist die **Kapitalwertberechnung** in der Praxis **wenig wichtig**, da es meistens darum geht, **wieviel man am Ende herausbekommt**; deshalb wird meist nach dem **Endwert** gefragt.

- Die **statische Investitionsrechnung** wird in dieser Vorlesung **nicht behandelt**.

49

- Die **äquivalente Annuität** bedeutet eine **Umwandlung** des **Kapitalwerts/ des Endwerts** in eine **jährliche Entnahme**. Sie ist auch als „**Kapitalwiedergewinnungsfaktor**“ (KWF) bekannt und stellt den **Kehrwert** des **Rentenbarwertfaktors** (RBF) dar.

- Für eine **Kreditaufnahme** mit den Beispielszahlen gilt:

Würde man nun auf den **Kapitalwertanteil verzichten** und nähme nur einen Anfangsstrom in Höhe von  $A_0$  in Anspruch, könnte man stattdessen die **äquivalente Annuität** auszahlen.

Kreditverlauf bei $C(0) = A(0) + V(0)$				
t	a(t)	KB(t) = $KB(t-1) - S(t-1)$	Z(t) = $KB(t) \cdot i$	S(t) = $a(t) - Z(t)$
0	-1.308,66			
1	368,00	1.308,66	130,87	237,13
2	440,00	1.071,53	107,15	332,85
3	398,00	738,68	73,87	324,13
4	456,00	414,55	41,45	414,55

KB = Kapitalbindung · Z = Zinszahlung · S = Tilgung (Settlement)  
Zinssatz = 10,00

- Zur Bestimmung der Höhe dieser jährlichen Zahlung geht man davon aus, daß zunächst **für eine Periode** auf den **Kapitalwert  $V_0$  verzichtet** und er mit **i verzinst** wird. Danach geht **einmal die jährliche Zahlung g** ab. Der Restbetrag wird für die zweite Periode verzinst und am Ende dieser Periode wird wieder **g** ausbezahlt. Dieser Vorgang vollzieht sich für die volle Anzahl der Perioden. Mathematisch **reduziert** sich so der **Kapitalwert** durch die jährlichen Zahlungen **auf Null**:

$$(((V_0 \cdot q - g) \cdot q - g) \cdot q - g) \cdot q - g = 0 \quad \text{wobei } g = \text{äquivalente Annuität}$$

Es ergibt sich zur **Berechnung** der **äquivalenten Annuität**

$$g = V_0 \cdot \frac{q^T \cdot (q - 1)}{q^T - 1}$$

Damit besteht im Beispiel die Möglichkeit **jährlicher Entnahmen** in Höhe von  $g = 108,66 \cdot (1,1^4 \cdot 0,1) / (1,1^4 - 1)$  bzw.  $g = 34,28$

Zinst man diese jährlichen Zahlungen auf den Anfangszeitpunkt  $t_0$  ab, so ergibt die Summe den **Barwert**<sup>2</sup> dieser **äquivalenten Annuität**.

Kreditverlauf bei $C(0) = A(0)$						
t	a(t)	KB(t) = KB(t-1) - S(t-1)	Z(t) = KB(t) * i	S(t) = a(t) - Z(t)	g	
0	-1.200,00					
1	368,00	1.200,00	120,00	213,72	34,28	
2	440,00	986,28	98,63	307,09	34,28	
3	398,00	679,19	67,92	295,80	34,28	
4	456,00	383,39	38,34	383,38	34,28	

KB = Kapitalbindung · Z = Zinszahlung · S = Tilgung (Settlement)

Zinssatz = 10,00

- Es zeigt sich, daß der **Endwert** ebenso wie die **jährliche Annuität** direkt **aus dem Kapitalwert** zu **errechnen** sind.

Die drei relevanten Formeln sind:

$$\text{Kapitalwert} \quad V_0 = \sum_{t=1}^T a_t \cdot q^{-t} - A_0$$

$$\text{Jährliche Annuität} \quad g = V_0 \cdot \frac{q^T \cdot (q-1)}{q^T - 1}$$

$$\text{Endwert} \quad V_T = V_0 \cdot q^T = \sum_{t=1}^T a_t \cdot q^{T-t} - A_0 \cdot q^T$$

Es genügt also, **einen Parameter** zu kennen, um die **Nützlichkeit** eines **Projekts** zu bestimmen: Ist **einer** der drei Werte **größer Null**, so **lohnt** sich die **Investition**.

[54](#)

- Bei einer **Entscheidung** zwischen **mehreren Projekten gleicher Laufzeit** ist dasjenige am **lohnendsten**, das den **höchsten Kapitalwert** (Endwert, äquivalente Annuität) aufweist.

[55](#)

- Bevor eine sinnvolle **Entscheidung zwischen Projekten unterschiedlicher Laufzeit** möglich ist, muß man auf einen **einheitlichen Planungszeitraum** des Investors abstellen. Das wird erreicht, indem das **Projekt** kürzerer Laufzeit auf die **Laufzeit** des **längeren Projekts projiziert** wird.

Es gehe um einen Vergleich der

**Investition A** {-1200, 368, 440, 398, 456} und

**Investition C** {-1400, 530, 490, 390, 360, 130}

durch einen **Vergleich** der **Endwerte** bei einem Kalkulationszinssatz von 10%.

Nach

$$V_T = \sum_{t=1}^T a_t \cdot q^{T-t} - A_0 \cdot q^T$$

wäre anstelle  $V_T = 489,81 + 532,40 + 437,80 + 456,00 - 1756,92 = 159,09$

für das **Projekt A** nun auf **5** anstelle von **4 Perioden** zu rechnen und die Addition lautete  $= 538,79 + 585,64 + 481,58 + 501,60 - 1932,61 = 175$ .

<sup>2</sup> Der **Barwert** ist der aktuelle Wert einer in der Zukunft fälligen Zahlung, der sich durch Abzinsen unter Berücksichtigung von Zinsen ergibt. Der Barwert wird auch als **Gegenwartswert** bezeichnet. [Gabler: Kompakt-Lexikon Bank und Börse]

In der 5. Periode fiele zwar **kein Einzahlungsüberschuß (EZÜ)** an, trotzdem wirkte sich die **längere Laufzeit** auf die vorherigen EZÜ' und damit die **Gesamtsumme** aus und der **Endwert** stiege.

Es gehe um einen Vergleich der

**Investition A** {-1200, 368, 440, 398, 456} und

**Investition D** {-1400, 540, 490, 390, 360, 130}

durch einen **Vergleich der äquivalenten Annuitäten**.

Nach

$$g = V_0 \cdot \frac{q^T \cdot (q-1)}{q^T - 1} = \left( \sum_{t=1}^T a_t \cdot q^{-t} - A_0 \right) \cdot \frac{q^T \cdot (q-1)}{q^T - 1}$$

im Falle des **Projekts A** mit **4 Perioden** also:

$$g = \left( \sum_{t=1}^4 a_t \cdot 1,1^{-t} - 1.200 \right) \cdot \frac{1,1^4 \cdot (1,1-1)}{1,1^4 - 1} = 34,28$$

Um eine **Vergleichbarkeit** herbeizuführen, wird **Projekt A** auf **5 Perioden** berechnet:

$$g = \left( \sum_{t=1}^5 a_t \cdot 1,1^{-t} - 1.200 \right) \cdot \frac{1,1^5 \cdot (1,1-1)}{1,1^5 - 1} = 28,66$$

Für **Projekt D** errechnet man

$$g = \left( \sum_{t=1}^5 a_t \cdot 1,1^{-t} - 1.400 \right) \cdot \frac{1,1^5 \cdot (1,1-1)}{1,1^5 - 1} = 30,47$$

Vergleicht man nun die **äquivalente Annuität** zwischen

Projekt **A** mit  $g = 28,66$  und

Projekt **D** mit  $g = 30,47$ ,

so zeigt sich, daß Projekt **D** wegen der höheren Ausschüttung **sinnvoller** ist.

Werden also einander ausschließende **Projekte über** den **Endwert** oder die **äquivalente Annuität** miteinander **verglichen**, so ist zunächst auf **diesselbe Laufzeit** abzustellen. Im Falle eines **Kapitalwert-Vergleichs** ist immer das **Projekt** mit dem **höheren Kapitalwert** zu **realisieren**. Es ist für diese Entscheidung **nicht notwendig**, beide **Projekte** auf **diesselbe Laufzeit** zu bringen.