wisu
kompakt

BASISWISSEN BWL

Axiomatische Grundlagen des Bernoulli-Prinzips

Einordnung des Bernoulli-Prinzips

Im Rahmen der präskriptiven Entscheidungstheorie stellt das Bernoulli-Prinzip das geschlossenste theoretisch fundierte Entscheidungskriterium für Risikosituationen dar.

Unter einer Entscheidung bei Risiko versteht man die Auswahl einer von mehreren sich gegenseitig ausschließenden Handlungsalternativen a_i $(i = 1,\dots,m)$, deren Ergebnisse e_{ij} vom Eintritt eines Umweltzustandes s_j $(j = 1,\dots,n)$ aus einer Menge möglicher Zustände abhängen. Dabei ist der Entscheidungsträger in der Lage, jedem möglichen Umweltzustand eine (objektive oder subjektive) Eintrittswahrscheinlichkeit zuzuordnen, so daß jede Alternative durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Ergebnisgröße (Lotterie) charakterisiert ist.

Die theoretische Basis des Bernoulli-Prinzips, aus der sich die Begründung als rationales Entscheidungskriterium ergibt, bildet das System der Axiome rationalen Verhaltens. Hierbei handelt es sich um eine Klasse von Sätzen, die nicht im mathematischen Sinne bewiesen werden können, sondern lediglich plausible Grundanforderungen an rationales Handeln formulieren. Aus ihnen lassen sich durch logische Deduktion alle Aussagen des Bernoulli-Prinzips zwingend ableiten.

Akzeptiert ein Entscheidungsträger die mit diesen Axiomen verbundenen Verhaltenspostulate, so existiert eine auf der Menge aller Ergebnisse definierte kardinale **Risikonutzenfunktion u(e)** .

Der Präferenzwert einer Alternative ergibt sich dann beim Bernoulli-Prinzip als Erwartungswert der ihren Ergebnissen entsprechenden Nutzenwerte:

$$\phi(a_i) = E[u(e_{ij})] = \sum_{j=1}^{n} p(s_j) \cdot u(e_{ij})$$

Optimal ist diejenige Alternative, die den höchsten **Nutzenerwartungswert** aufweist.

Ermittlung der Risikonutzenfunktion

Um das Bernoulli-Prinzip anwenden zu können, muß der Entscheidungsträger zunächst seine individuelle Risikonutzenfunktion ermitteln.

Eine besonders einfache und anschauliche Vorgehensweise stellt die **Bernoulli-Befragung** dar, die im Einklang mit den Axiomen rationalen Verhaltens steht und die Gültigkeit des Bernoulli-Prinzips für den Entscheidungsträger unterstellt. Als gebräuchlichste Variante der Bernoulli-Befragung soll hier die Methode variabler Wahrscheinlichkeiten vorgestellt werden.

In einem ersten Schritt wählt der Entscheidungsträger innerhalb der Menge aller möglichen Ergebnisse das für ihn günstigste Ergebnis $\bar{e}$ und das ungünstigste Ergebnis $\underline{e}$, so daß alle anderen Ergebniswerte e_{ij} im Präferenzsystem des Entscheidungsträgers zwischen $\bar{e}$ und $\underline{e}$ liegen: $\bar{e} \geq e_{ij} \geq \underline{e}$. Dem Ergebnis $\underline{e}$ wird der Nutzenwert $u(\underline{e}) = 0$, dem Ergebnis $\bar{e}$ der Nutzenwert $u(\bar{e})=1$ zugeordnet. Auf diese Weise wird die Risikonutzenfunktion auf das Wertintervall zwischen 0 und 1 normiert.

Um die Nutzenwerte für die Ergebnisse e_{ij} zu ermitteln, wird der Entscheidungsträger jeweils vor die hypothetische Wahl zwischen dem sicheren Ergebnis e_{ij} und einer Lotterie, die mit der Wahrscheinlichkeit p zu dem Ergebnis $\bar{e}$ und mit der Gegenwahrscheinlichkeit (1 - p) zu $\underline{e}$ führt, gestellt. Diese einfache Lotterie wird auch als **Basis-Referenz-Lotterie** bezeichnet und kann wie folgt dargestellt werden:

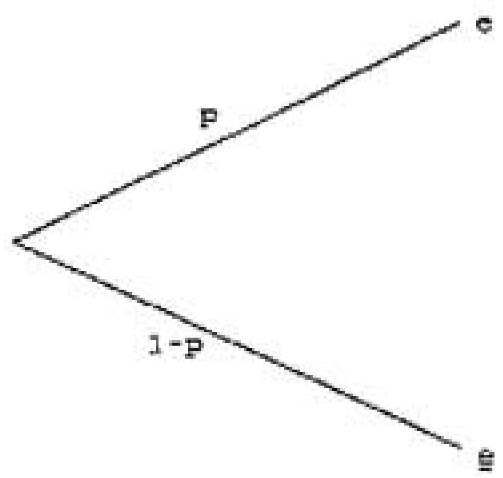

Abb. 1

Der Entscheidungsträger muß nun einen kritischen Wahrscheinlichkeitswert p_{ij}^* angeben, bei dem er gerade indifferent zwischen dem sicheren Ergebnis und der Basis-Referenz-Lotterie ist:

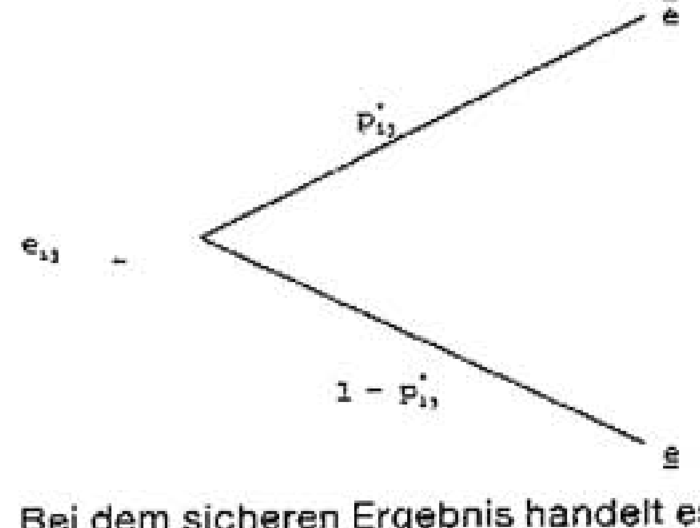

Abb. 2

Bei dem sicheren Ergebnis handelt es sich dann um das Sicherheitsäquivalent der betrachteten Lotterie.

Unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Bernoulli-Prinzips muß der Nutzenwert des sicheren Ergebnisses mit dem Nutzenerwartungswert der Basis-Referenz-Lotterie übereinstimmen:

$$u(e_{ij}) = p_{ij}^{*} \cdot u(\bar{e}) + (1 - p_{ij}^{*}) \cdot u(\underline{e})$$

Aufgrund der vorgenommenen Normierung folgt:

$$u(e_{ij}) = p_{ij}^{*}$$

Das bedeutet, daß die durch die Bernoulli-Befragung ermittelte **Indifferenzwahrscheinlichkeit** p_{ij}^{*} als **Nutzenwert der Ergebnisgröße** e_{ij} aufgefaßt werden kann. Daneben ist jedoch auch jeder andere Wert, der durch eine positiv-lineare Transformation aus p_{ij}^{*} hervorgeht, als Nutzenwert denkbar. Eine Umformung der obigen Gleichung zeigt diesen Zusammenhang:

$$u(e_{ij}) = u(\underline{e}) + [u(\bar{e}) - u(\underline{e})] \cdot p_{ij}^{*}$$
für beliebige $u(\bar{e}), u(\underline{e})$ mit $u(\bar{e}) - u(\underline{e}) \geq 0$

Mit Hilfe der Bernoulli-Befragung können für beliebig viele Ergebniswerte die zugehörigen Nutzenwerte ermittelt werden. Die Risikonutzenfunktion erhält man dann mittels linearer Interpolation oder Approximation durch einen vorgegebenen Funktionstyp.

Axiome rationalen Verhaltens

Anhand eines Beispiels soll nun gezeigt werden, wie die Entscheidung gemäß dem Bernoulli-Prinzip zwingend aus den Axiomen rationalen Verhaltens abgeleitet werden kann. Dabei wird das **Axiomensystem von Luce/Raiffa** (1957) zugrunde gelegt.

Gegeben sei folgende Ergebnismatrix, wobei sich die darin enthaltenen Ergebniswerte auf positiv bewertete Sachverhalte, beispielsweise Einkommen oder Gewinn, beziehen:

	s_1	s_2	s_3
	$p(s_1) = 0{,}35$	$p(s_2) = 0{,}5$	$p(s_3) = 0{,}15$
a_1	9	4	100
a_2	25	0	64

Abb. 3

Angenommen, bei einer Bernoulli-Befragung wurde für den (risikoaversen) Entscheidungsträger die Risikonutzenfunktion $u(e) = 0{,}1 \cdot \sqrt{e}$ ermittelt, so daß sich für die Alternativen folgende Präferenzwerte ergeben:

$$\phi(a_1) = 0,35 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{9} + 0,5 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{4} + 0,15 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{100} = 0,355 \text{ und}$$

$$\phi(a_2) = 0,35 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{25} + 0,5 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{0} + 0,15 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{64} = 0,295.$$

Nach dem Bernoulli-Prinzip wird der Entscheidungsträger Alternative a_1 wählen, da diese den höheren Nutzenerwartungswert aufweist. Zum gleichen Ergebnis kommt der Entscheidungsträger, wenn er die Axiome rationalen Verhaltens sukzessive anwendet.

Nach dem Ordinalen Prinzip existiert auf der Menge der Ergebnisse eine vollständige, transitive Präferenzordnung. Unter Vollständigkeit wird verstanden, daß der Entscheidungsträger alle Ergebnisse paarweise miteinander vergleichen kann. Er ist also in der Lage, für zwei beliebige Ergebnisse anzugeben, ob er das eine Ergebnis dem anderen vorzieht oder ob er indifferent zwischen beiden ist. Transitivität bedeutet, daß aus den vom Entscheidungsträger angegebenen Präferenzrelationen $e_x \geq e_y$ und $e_y \geq e_z$ auch $e_x \geq e_z$ folgt.

In dem betrachteten Beispiel ist der Entscheidungsträger bei Gültigkeit des Ordinalen Prinzips in der Lage, das günstigste Ergebnis $\bar{e} = 100$ und das ungünstigste $\underline{e} = 0$ zu bestimmen.

Das **Stetigkeitsprinzip** besagt, daß der Entscheidungsträger eine Wahrscheinlichkeit p_{ij}^{*} angeben kann, für die er zwischen einem sicheren Ergebnis e_{ij} (mit $\bar{e} \geq e_{ij} \geq \underline{e}$) und der Basis-Referenz-Lotterie indifferent ist:

$$e_{ij} \sim (\bar{e};\, p_{ij}^{*};\, \underline{e})$$

In dem Beispiel würde der Entscheidungsträger bei einer Befragung - soweit er konsistente Angaben macht - die folgenden, fett gedruckten Indifferenzwahrscheinlichkeiten angeben:

$e_{12} = 4 \quad \sim \quad$ (100; **0,2**; 0)
$e_{11} = 9 \quad \sim \quad$ (100; **0,3**; 0)
$e_{21} = 25 \quad \sim \quad$ (100; **0,5**; 0)
$e_{23} = 64 \quad \sim \quad$ (100; **0,8**; 0)

Für $\bar{e}$ und $\underline{e}$ gilt natürlich $p_{\bar{e}}^{*} = 1$ und $p_{\underline{e}}^{*} = 0$.

Im nächsten Schritt kann nun jedes Ergebnis e_{ij} der Alternative a_i durch die ihm äquivalente Basis-Referenz-Lotterie ersetzt werden. Gemäß dem **Substitutionsprinzip** ist der Entscheidungsträger zwischen der so entstandenen zweistufigen Lotterie a'_i und der ursprünglichen einstufigen Lotterie a_i indifferent. Für die beiden Alternativen des Beispiels gilt:

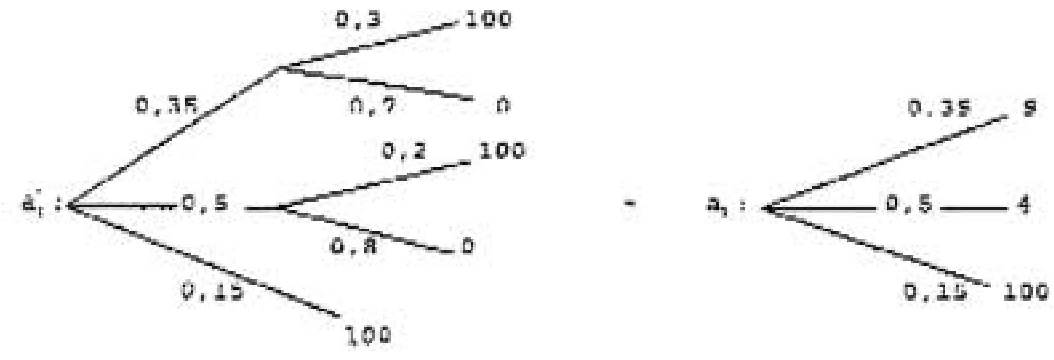

Abb. 4

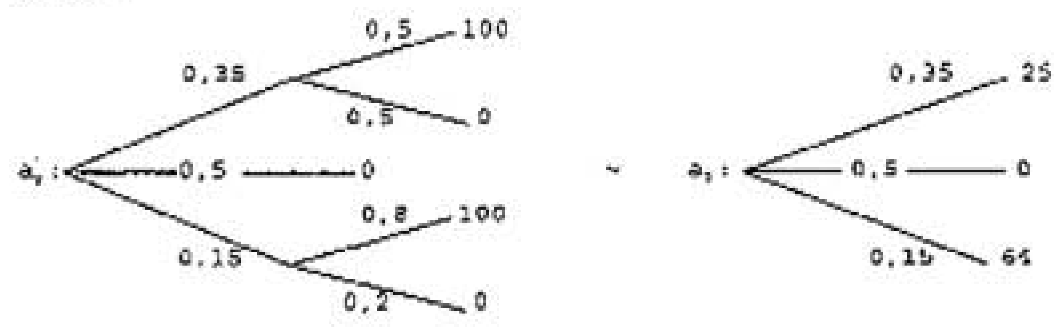

Abb. 5

Nach dem **Reduktionsprinzip** sieht der Entscheidungsträger die zweistufige Lotterie a'_i, die nur noch die beiden Ergebnisse $\bar{e}$ und $\underline{e}$ enthält, und eine einstufige Lotterie a''_i, bei der beide Ergebnisse jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit eintreten, als gleichwertig an. Die den Alternativen a'_1 und a'_2 äquivalenten einstufigen (Basis-Referenz-)Lotterien lauten:

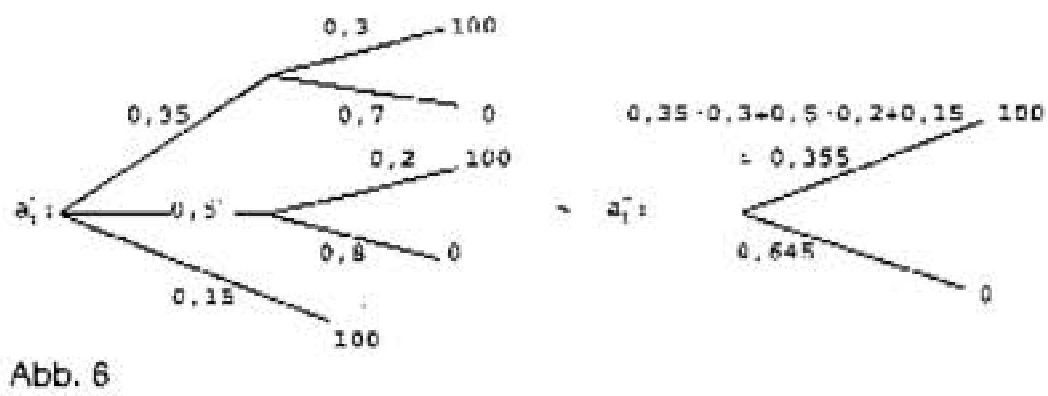

Abb. 6

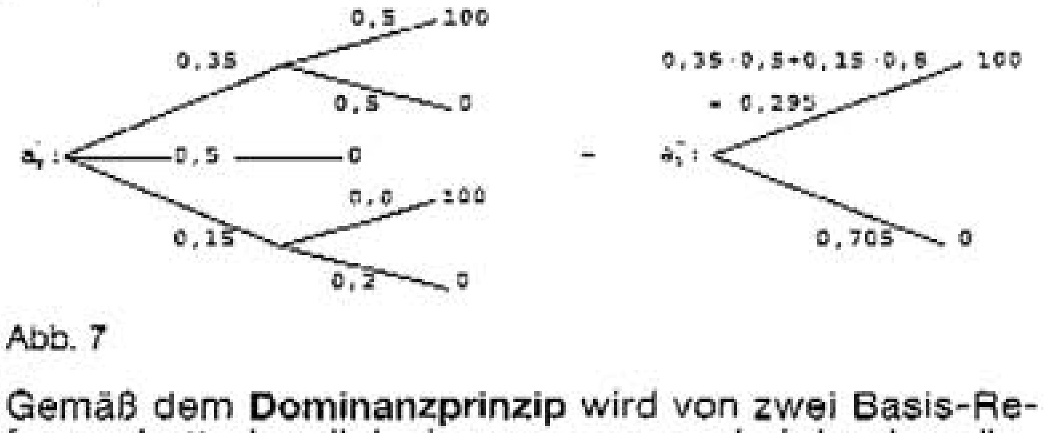

Abb. 7

Gemäß dem **Dominanzprinzip** wird von zwei Basis-Referenz-Lotterien diejenige vorgezogen, bei der das günstigste Ergebnis die größere Eintrittswahrscheinlichkeit aufweist, so daß in dem Beispiel a''_1 zu wählen ist.

Bei Gültigkeit des **Transitivitätsprinzips bezüglich der Handlungsalternativen** folgt aus $a_i \sim a'_i$ und $a'_i \sim a''_i$ auch $a_i \sim a''_i$. In dem Beispiel ergibt sich dann wegen $a''_1 > a''_2$ unmittelbar $a_1 > a_2$.

Gewählt wird also die Alternative, deren äquivalente Basis-Referenz-Lotterie die höhere Eintrittswahrscheinlichkeit für e aufweist. Diese Wahrscheinlichkeit, die sich als gewogene Summe der vom Entscheidungsträger ermittelten Indifferenzwahrscheinlichkeiten (und damit Nutzenwerte) ergibt, stimmt im vorliegenden Beispiel für jede Alternative gerade mit dem Präferenzwert bei unmittelbarer Anwendung des Bernoulli-Prinzips überein. Es zeigt sich, daß der Entscheidungskalkül des Bernoulli-Prinzips auf die schrittweise Anwendung der Axiome rationalen Verhaltens zurückgeführt werden kann.

Schlußbemerkung

Neben dem hier vorgestellten Axiomensystem von Luce/Raiffa wurden weitere Axiomensysteme entwickelt, die jedoch letztlich zu demselben Erwartungsnutzenkalkül führen. Die jeweiligen Axiome rationalen Verhaltens - vor allem das Substitutionsprinzip - sind in der Literatur kontrovers diskutiert worden, bis heute gibt es aber kein dem Bernoulli-Prinzip überlegenes Entscheidungskriterium, um in Risikosituationen Entscheidungen zu treffen, die dem Anspruch der Rationalität genügen.

Dipl.-Kff. Gabriele Hühn/Dipl.-Kfm. Knuth Martens, Köln

Literaturempfehlungen: Bamberg, G./Coenenberg, A. G.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre. 9. Aufl., München 1996; Eisenführ, F./Weber, M.: Rationales Entscheiden. 2. Aufl., Berlin u.a. 1994; Laux, H.: Entscheidungstheorie. 3. Aufl., Berlin u.a. 1995; Sieben, G./Schildbach, T.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungstheorie. 4. Aufl., Düsseldorf 1994; Wiese, H./Bültel, D.: Bernoulli-Prinzip und Nutzenaxiomatik. In: WISU, 25. Jg. (1996), S. 781 - 787.