Martens: Übungen in der Betriebswirtschaftslehre, #08
Übung „Betriebliche Entscheidungslehre“

11.07.2005

4.2.2.3

Axiomatik des Bernoulli-Prinzips

- Wenn ET Axiome rationalen Verhaltens als rational akzeptiert, muß er auch das Bernoulli-Prinzip als rational akzeptieren, – beides steht zwingend im Einklang.

Beispiel-Ergebnismatrix

	S_1 $P(S_1) = 0{,}35$	S_2 $P(S_2) = 0{,}5$	S_3 $P(S_3) = 0{,}15$
a_1	100	20	30
a_2	60	80	0

Lotterie
Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisgröße

$$L = (e_1P_1, e_2P_2, \ldots, e_mP_m)$$

Basisreferenzlotterie

$$L = (e_{max}; P; e_{min})$$

wobei P die Wahrscheinlichkeit für das maximale Ergebnis ist

Wenn es gelänge, durch das Bernoulli-Prinzip („Weg 1“) und die Axiome („Weg 2“) zum gleichen Ergebnis zu kommen, wäre der Beweis für die o.g. Behauptung erbracht.

- **Weg 1**
  Direkte Entscheidung nach dem Bernoulli-Prinzip

1. $U(e_{max}) = U(100) = 1$
$U(e_{min}) = U(0) = 0$

2. Bestimmung der **Nutzenwerte**

→ Befragung „sicheres Ergebnis von 20 gegen unsicheres Ergebnis aus 0 ... 100“
Annahmen: Risikoscheuer ET antwortet „mit 30%“
→ Nutzenwert von 20 = U(20) = 0,3
→ **20 ~ (100; 0,3; 0)**

→ weitere Ergebnisse der Befragung seien
U(30) = 0,4
U(60) = 0,75
U(80) = 0,95

3. Errechnung der **Nutzenerwartungswerte**

$$NEW(a_1) = U(100) \times 0{,}35 + U(20) \times 0{,}5 + U(30) \times 0{,}15$$
$$= 1 \times 0{,}35 + 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}15$$
$$= 0{,}56$$
$$NEW(a_2) = 0{,}7375$$

→ **a_2 ist zu wählen, da höherer NEW**

- **Weg 2**
  Entscheidung durch sukzessives Anwenden der Axiome rationalen Verhaltens (Luce/ Raiffa)

1. Ordinales Prinzip

a) Ordnungs-Axiom
(= „Vollständigkeits-Axiom“)

Es gilt:

$e_i \prec e_j$

oder

$e_j \succ e_i$

oder

$e_i \sim e_j$

b) Transitivitäts-Axiom
(bzgl. der Ergebnisse)

Aus

$e_i \succsim e_j$

und

$e_j \succsim e_k$

folgt

$e_i \succsim e_k$

d.h. alle Ergebnisse eines Entscheidungsproblems lassen sich in eine Reihenfolge bringen

Im Beispiel:
$100 \succ 80 \succ 60 \succ 30 \succ 20 \succ 0$
so können e_{min} und e_{max} festgelegt werden

Exkurs: Gefangenen-Dilemma (Luce/Raiffa)

Akteure:

- 2 Gefangene (A, B)
- bezichtigt einer gemeinsam begangenen schweren Tat
- die man ihnen nicht nachweisen kann
- bezichtigt einer kleineren Straftat, die sich leicht nachweisen läßt
- untergebracht in separaten Zellen (keine Absprache möglich)

Kronzeugenregelung:

- Geständnis als einziger Täter und Leugnen des anderen Täters führt zur eigenen Entlassung und zu 10 Jahre für anderen;
- Geständnis von beiden führt zu 8 Jahren für beide;
- Leugnen von beiden führt wegen nachweisbarer kleinerer Straftat zu jeweils einem Jahr Gefängnis

„Auszahlungsmatrix“

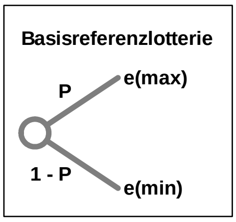
A	B	
	gestehen	leugnen
gestehen	8/8 (a_{11})	0/10(a_{12})
leugnen	10/0 (a_{21})	1/1(a_{22})

Nash-Lösung: a_{11}
Für A (B) ist „gestehen“ immer beste Lösung, unabhängig was B (A) tut

Kooperative Lösung: a_{22}
Wird i.d.R. nicht zustande kommen, weil keine Absprache möglich

2. Stetigkeits-Prinzip

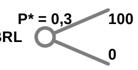
Gegeben seien ein sicheres Ergebnis e_j und die BRL (Basisreferenzlotterie) (e_{max}; P; e_{min}) mit der Eigenschaft $e_{max} \succ e_j \succ e_{min}$

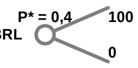


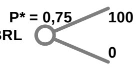
ergo: $e_j \begin{array}{|c|}\succ \\ \prec \\ \sim\end{array}$ BRL

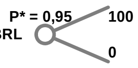
dann gibt es eine **Indifferenzwahrscheinlichkeit P***, sodaß der ET indifferent ist zwischen dem sicheren Ergebnis und der Lotterie: $e_j \sim (e_{max}; P^*; e_{min})$

Im Beispiel:

$e_j = 20 \sim$ BRL 

$e_j = 30 \sim$ BRL 

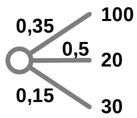
$e_j = 60 \sim$ BRL 

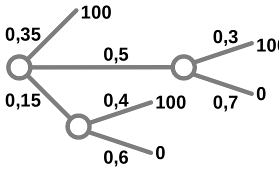
$e_j = 80 \sim$ BRL 

3. **Substitutionsprinzip**

In einer Lotterie kann ein Ergebnis e_{ij} durch die äquivalente BRL (e_{max}; P*; e_{min}) ersetzt werden, sodaß der ET zwischen der ursprünglichen und der neu zusammengesetzten Wahrscheinlichkeitsverteilung indifferent ist.

Im Beispiel:

a_1 

~ a_1' 

(„zusammengesetzte Lotterie“)

4. **Reduktionsprinzip**

Der ET ist indifferent zwischen einer zusammengesetzten Lotterie und einer einfachen Lotterie, sofern jedes Ergebnis bei beiden Lotterien dieselbe Eintrittswahrscheinlichkeit besitzt.

Im Beispiel:

a_1': Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für 100?
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für 0?

a_1': $P(100) = 0{,}35 + 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}15 \times 0{,}4$
$= 0{,}56$
$P(0) = 0{,}44$

a_2': $P(100) = 0{,}7375$
$P(0) = 0{,}2625$

5. **Monotonieprinzip** („Dominanzprinzip“)

Lotterie $L_1 = (e_{max}; P_1; e_{min})$ wird einer zweiten Lotterie $L_2 = (e_{max}; P_2; e_{min})$ genau dann vorgezogen oder als gleichwertig erachtet, wenn gilt: $P_1 \geq P_2$.

Im Beispiel:
$a_1' \succ a_2'$ weil $0{,}7375 > 0{,}56$

6. **Transitivitätsprinzip** (bzgl. der Handlungsalternativen)

Wenn

$a_i \succsim a_j$

und

$a_j \succsim a_k$

folgt

$a_i \succsim a_k$

Im Beispiel:
a_1 und a_1' sind indifferent (und $a_2 \sim a_2'$)
→ es folgt aus $a_2' \succsim a_1'$ daß $a_2 \succsim a_1$

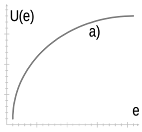
→ **Das Ergebnis ist das gleiche wie bei Weg 1: a_2 ist zu wählen**

4.2.2.4

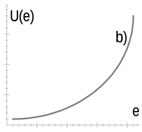
Risikonutzenfunktion und Risikoeinschätzung

- Annahme: positiv bewertete Sachverhalte („mehr ist besser als weniger“, z.B. Gewinn)
  → dann verläuft die RNF streng monoton steigend, d.h. es gilt $\frac{dU}{de} > 0$

a) Betrachtung **Risikoaversion**
es gilt, die 2. Ableitung ist negativ, also: $\frac{d^2U}{de^2} < 0$
→ die Kurve verläuft
degressiv steigend (konkave Krümmung)



b) Betrachtung **Risikofreude**
es gilt, die 2. Ableitung ist positiv, also: $\frac{d^2U}{de^2} > 0$
→ die Kurve verläuft
progressiv steigend (konvexe Krümmung)



c) Betrachtung **Risikoneutralität**
es gilt, daß die 2. Ableitung Null ist, also: $\frac{d^2U}{de^2} = 0$
→ die Kurve verläuft
linear steigend